**ИИН 971201350355**

**Тел, ватсап номер 87071375744**

****

**ОРУНБАСАРОВ Тұрарбек Жаңабайұлы,**

**Батыр ауылы №15 жалпы білім беретін мектебінің математика пәні мұғалімі.**

**Маңғыстау облысы, Мұнайлы ауданы**

**ҚАЙДА БАРАТЫНЫМЫЗДЫ, ҚАЙДА БОЛҒАНЫМЫЗДЫ БАЙЛАНЫСТЫРАТЫН МАТЕМАТИКА**

Рекурсия әр түрлі математикалық сыныптардағы идеялар арасында көпір құрады және шығармашылық математикалық ойлаудың күшін көрсетеді.



Бұл "қол алысу мәселесі" арқылы шешіледі.Математика пәнінің мұғалімі ретінде маған осы тақырып қызықты болып тереңірек зертей бастадым,осылайша шешімін табу жолдарын қарастырдым.

Бұл шешім осылай жүреді: сіз тоғыз адам болып жиында кездесеңіз әр адамның бір-бірінің қолын қысуынан бастаңыз. Әрқайсысы тоғыз қол алысып, он адам 9 × 10 = 90 жалпы қол алысады. Бірақ бұл әрбір қол алысуды екі рет есептейді — әрбір шейкердің көзқарасы бойынша бір рет — сондықтан қол алысудың нақты саны 902=45. Жеңіске жету үшін қарапайым санау дәлелі!

Сондай-ақ мәселені шешудің мүлде басқа жолы бар. Елестетіп көріңізші, қонақтар бір-бірден келеді, ал олар жеткенде жиналғандардың бәрімен қол алысады. Бірінші адамның қолын сермеуге болмайды, сондықтан бір адамдық кеште жалпы қол алысу нөлге тең болады. Енді екінші адам келіп, бірінші адаммен қол алысады. Бұл жиынтыққа бір қол алысуды қосады, сондықтан екі адамнан тұратын кеште 0 + 1 = 1 жалпы қол алысу болады. Үшінші адам келіп, алғашқы екі қонақпен қол алысқанда, бұл жиынтыққа екі қол алысуды қосады. Төртінші адамның келуі жалпы үш қол алысуды қосады және т.б.

Бұл стратегия қол алысудың дәйектілігін рекурсивті түрде модельдейді, яғни реттіліктегі әрбір термин өзінен бұрынғыларға қатысты анықталады. Сіз Фибоначчи тізбегімен, ең танымал рекурсивті тізбекпен таныс шығарсыз. Ол басталады 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, және алдыңғы екеуінің қосындысына тең әрбір келесі мүшемен жалғасады.

Төменде көретініміздей, рекурсия - бұл математикалық идеялардың кең ауқымы туралы ойлауға арналған икемді және қуатты құрылым. Хемахандра сияқты ежелгі үнді ғалымдары 1150 жылдан бастап осы типтегі тізбектер туралы білгенімен, олар бүгінгі күнге дейін математиктер үшін қызықты мәселелерді ұсынады.

Рекурсивті ойлаудың қол алысу проблемасына қалай көмектесетінін көрейік. Егер біз рұқсат етсек an бір уақытта қол алысу санына тең n-тұлға тарап, біз бұл рекурсивті қатынасты келесі формуламен көрсете аламыз:

an=an−1+n–1

Бұл бізге бір уақытта қол алысу саны туралы айтады n-жеке тұлға кеші (an) қол алысу санына тең (n − 1)-жеке тұлға (an−1) plus n − тағы 1 қол алысу, жаңа адам келгенде, олар бұрын болған қол алысулардың белгілі бір санын қосады деген ойды ескере отырып.

Қол алысу мәселесінің нақты нұсқасында біз білгіміз келеді a10, рекурсивті қатынасты қолданатынымызды анықтау үшін 10 адамдық кеште қол алысу саны

a10=a9+9

Мәнін табу үшін a10, біз тек мәнін білуіміз керек a9 және оған 9 қосыңыз. Мәнін қалай табамыз a9? Рекурсияны қолдану арқылы, әрине!

a9=a8+8

Енді мәнін табу үшін a8, біз мәнін табуымыз керек a7, білуді қажет етеді a6 және солай. Осы сәтте сіз бұл шексіз түсу түрінде мәңгілікке жалғасады деп қорқуыңыз мүмкін, бірақ біз жеткенде a1 біз біттік, өйткені бір адамдық кеште жалпы қол алысудың нөлі болатынын білеміз.

a1=0

Бұл бастапқы немесе "нөлдік" мән рекурсивті реттіліктің негізгі белгісі болып табылады. Бұл рекурсивті қатынасты қолдана отырып, дәйектілік арқылы кері шегіну процесінің аяқталуына кепілдік береді. Нөлдік мәнге жеткеннен кейін кері шегіну тоқтайды, содан кейін қалаған мәнді алу үшін тізім бойынша алға жылжуға болады.

a1=0

a2=a1+1=0+1=1

a3=a2+2=1+2=3

a4=a3+3=3+3=6

a10=a9+9=36+9=45

Тізімді қарап шығу арқылы біз 10 адамнан тұратын кеште 45 жалпы қол алысу бар екенін көреміз, бұл біздің алғашқы есептеуімізбен келіседі. Егер сіз менің оқушыларым сияқты болсаңыз, жауабын біліп алғаннан кейін, бұл мәселені шешудің басқа әдісі не үшін қажет екенін сұрай аласыз, әсіресе бұл екінші тәсіл ұзаққа созылатын сияқты.

Бұл сұраққа жауаптардың бірі - рекурсивті тәсіл бізге бұл мәселеде болып жатқан оқиғаларға мүлдем басқаша көзқарас береді, ал математикада әр түрлі көзқарастар барлығы пайдалы. Олар бізге ұғымдарды түсінуге әр түрлі мүмкіндіктер береді және әр түрлі құралдарды қолдануға мүмкіндік береді.

Атап айтқанда, рекурсия пайдалы, себебі ол математиканың барлық жерінде бар. Бұл, мысалы, сызықтық қатынастарда әркім математика сабағында — тұрақты өзгеру жылдамдығымен сипатталатын және жазықтықтағы түзулермен бейнеленетіндер туралы біледі. Сияқты сызықтық функция f(x)=3x+5 рекурсивті формула ретінде қарастыруға болады:

a0=5 an=an−1+3

Ойлаудың неғұрлым айқын тәсілі болса да f(2) солай болуы мүмкін f(2)=3×2+5=11, басқа әдіс - бұл a2=a1+3=a0+3+3=11. Сызықтық функциялардың іргелі сипаттамасын — тұрақты өзгеру жылдамдығын рекурсивті модельдеу бізге осы қатынас туралы ойлаудың тағы бір әдісін ұсынады. Тұрақты мультипликативті өзгеріспен сипатталатын экспоненциалды функциялармен де солай жасауға болады.

Рекурсивті ойлау сандар тізбегінен тыс жұмыс істейді. Егер сіз теңдеулер жүйесін шешкен болсаңыз, онда сіз рекурсивті тәсілді қолданған боларсыз. Жүйені шешу үшін

2x+y=10 3x–y=5

жою үшін алдымен екі теңдеуді қосуға болады y айнымалы, нәтижесінде теңдеу шығады 5x=15. Алу үшін осыны шешіңіз x= 3, табу үшін ауыстырыңыз y=4, және сіз аяқтадыңыз. Бұл тәсіл рекурсивті алгоритмді қолданады, мұнда жүйенің шешімі шешімнен кішігірім, өзара байланысты жүйелерге құрылады. Мысалы, 3 × 3 жүйесін шешу үшін сіз бір айнымалыны 2 × 2 жүйеге айналдыру үшін, содан кейін қайтадан 1 × 1 жүйеге айналдыру үшін жоясыз. Бұл оңай шешілетін жалғыз теңдеу осы рекурсивті процестің тұқымдық мәніне ұқсайды. Бұл кері шегінудің аяқталғанын білдіреді және сол жерден сіз рекурсивті тізбектегідей теңдеулер тізбегін қалпына келтіресіз.

Тіпті рекурсивті дәлелдеу әдістері бар. Мысалы, геометриядағы әйгілі формула - бұл көпбұрыштың бұрышының қосындысының формуласы, онда ішкі бұрыштарының өлшемдерінің қосындысы дейді. n-қырлы көпбұрыш - бұл (n−2)×180∘. Бұл нәтижені дәлелдеудің бір жолы - аннан бастау n-үшбұрышты алып тастасаңыз не болатынын елестетіп көріңіз.

Үшбұрышты алып тастау бұрылады n-гон ішіне (n − 1)-гон, сонымен қатар ішкі бұрыштың 180 градус өлшемін жояды. Бұл рекурсивті қатынас: үшін ішкі бұрыштың қосындысы n-гон ішкі бұрыштың қосындысынан 180 градусқа артық (n − 1)-гон. Жалпы нәтижені анықтау үшін үшбұрыштарды тұқымдық мәнге жеткенше алып тастаңыз, бұл жағдайда сіз үшеуінен басқасын алып тастаған кезде болады n-гонның төбелері. Осы кезде бастапқы көпбұрыш үшбұрышқа дейін азайтылды, оның ішкі бұрышының қосындысы 180 градусқа тең. Енді әр қадамға 180 градус қосып, сақтық көшірмесін жасаңыз, сонда сіз формуланы аласыз.

Біздің партиямызға оралсақ, қол алысу мәселесінің өзі бізге шығармашылық тұрғыдан ойлағанда, содан кейін проблеманың бірнеше түрлі перспективаларын байланыстырғанда мүмкін болатын нәрсені көрсетеді. Егер біз қол алысу кезектілігіміздің рекурсивті моделімен ойнайтын болсақ:

a1=0 an=an−1+n–1

Біз қайда бара жатырмыз?:

a2=a1+1=0+1

a3=a2+2=0+1+2

a4=a3+3=0+1+2+3

an=an−1+(n−1)=0+1+2+3+⋯+(n−1)

Енді бізде проблема туралы ойлаудың жаңа және жалпы тәсілі пайда болды: қол алысу саны n-адам тарап біріншісінің қосындысына тең n − 1 оң бүтін сандар.

Біздің бастапқы көзқарасымызды еске түсіріңіз. Жылы n-адам кеші, әр адам бір-бірімен қол алысады n − 1 адамдар. Өнім n(n−1) әрбір қол алысуды екі рет санайды, сондықтан қол алысудың жалпы саны n(n−1)2. Бірақ біздің әртүрлі әдістеріміз бір нәрсені есептейтіндіктен, олар бірдей нәтиже беруі керек. Атап айтқанда, бұл дегеніміз:

1+2+3+⋯+(n−1)=n(n−1)2

Қол алысу мәселесіне әр түрлі тәсілдерді қосу арқылы біз біріншісінің қосындысының жабық формуласын аламыз n − 1 оң бүтін сандар. Бірақ біз одан да көп нәрсені аламыз: өрнек n(n−1)2 бөлшекті қамтиды, бірақ ол бүтін сандардың қосындысына тең болғандықтан, ол да бүтін сан болуы керек. Бұл сандар теориясының қарапайым фактісін дәлелдейді: әрбір бүтін сан үшін n, n(n−1)2 бүтін сан.

Дәл осындай дәлелдерқазіргі математиканы қуаттандыруды жалғастыруда. Бір мысал ретінде 2000 жылдардың басындағы зерттеушілер [кейбір таңқаларлық нәтижелерді дәлелдеді](https://www.quantamagazine.org/the-astonishing-behavior-of-recursive-sequences-20231116/) сомос тізбегі деп аталатын рекурсивті тізбектер туралы, олар да бір нәрсені санайтындығын көрсетеді. Шығармашылық байланыстардың арқасында математиктер қайда болғанын түсіну арқылы қайда баруға болатынын тағы да анықтады.

**Жаттығулар**

1. Рекурсивті түрде анықталатын реттіліктің тұйық формуласын табыңыз
a1=1
an=an−1+2n–1

2. Бағанның соңында өрнек n(n−1)2 өрнек бөлшекті қамтыса да, бүтін сан ретінде көрсетілді, өйткені n(n−1)2 бұл бір нәрсені санаудың нәтижесі. Сондай-ақ, бұл өрнектің бүтін сан болуы керектігін көрсететін сандар теориясының дәлелі бар. Мынау не?

3. Рекурсивті реттіліктің алғашқы бірнеше шарттарын табыңыз
a1=1
an=11+an−1